1. Übung zur Vorlesung

Algebra I: Körper, Ringe, Moduln

im Wintersemester 2015/2016

Aufgabe 1. Es sei $\rho := e^{2\pi i/3}$ eine primitive dritte Einheitswurzel. Zeige, dass $\mathbb{Z}[\rho] := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\rho$ ein euklidischer Ring ist bezüglich der Normfunktion

$$N(a_0 + a_1\rho) = a_0^2 + a_1^2 - a_0 a_1.$$

Aufgabe 2 (Diskriminante)**.** Betrachte ein Polynom $f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$ mit den Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Die Diskriminante von f ist die Zahl

$$\Delta(f) := \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Betrachtet als Polynom in den Nullstellen α_i ist $\Delta(f)$ symmetrisch. Drücke $\Delta(f)$ für $n = 2, 3$ durch elementarsymmetrische Polynome in den α_i, und damit als Polynom in den Koeffizienten von f, aus.

Beschreibe in dem Raum $V := \{f = x^3 - ax - b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2$ die Orte $V_1 \subset V$ aller Polynome mit mehrfacher Nullstelle und $V_0 \subset V_1$ aller Polynome mit dreifacher Nullstelle (Zeichnung).

Aufgabe 3 (Diskriminante als Funktion der Potenzsummen)**.** Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen der Gleichung $x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n s_n = 0$ und $\Delta = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ die zugehörige Diskriminante. Weiter seien $p_k = \alpha_1^k + \ldots + \alpha_n^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ die Potenzsummen. Zeige: $\Delta = \det A$ mit $A = (A_{ij}) = (p_{i+j-2}) \in M_n(\mathbb{C})$.
Hinweis: Betrachte VV^t für $V = (V_{ij}) = (\alpha_j^{i-1})$.

Aufgabe 4 (Systeme symmetrischer Gleichungen)**.**

- Finde alle komplexen Lösungen $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ des Gleichungssystems

$$x + y = 1, \qquad x^5 + y^5 = 6.$$

- Finde alle komplexen Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 &= 3. \end{aligned}$$

Hinweis: Benutze die Newton-Formeln, um die Gleichungssysteme durch die ersten elementarsymmetrischen Polynome auszudrücken.

bitte wenden

Aufgabe 5 (Quaternionen)**.** Betrachte die Menge $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ aller Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Zeige:

(a) $\mathbb{H}$ ist ein Unterring (mit 1).

(b) $\mathbb{H}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Jedes Element $\neq 0$ ist invertierbar, d.h. $\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper.

(d) Verifiziere die Relationen $-1 = I^2 = J^2 = K^2 = IJK$. Folgere, dass $IJ = K, JK = I, KI = J$, und dass I, J, K paarweise anti-kommutieren (z.B. $IJ = -JI$).

(e) Das Konjugierte eines Elements $x \in \mathbb{H}$ ist definiert als $\overline{x} := x^*$ (d.h., als das transponierte und komponentenweise Konjugierte der entsprechenden Matrix). Zeige, dass das Konjugierte eines Elements $\overline{x_0 + x_1 I + x_2 J + x_3 K} \in \mathbb{H}$ gegeben ist durch $x_0 - x_1 I - x_2 J - x_3 K$. Verifiziere die Rechenregeln $\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$, $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ und $\overline{x^{-1}} = \overline{x}^{-1}$ (für $x \neq 0$).

(f) Das Normquadrat eines Elements $x \in \mathbb{H}$, $|x|^2 := x\overline{x}$ ist stets nicht-negativ, d.h. in $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot 1$, und multiplikativ, d.h. $|xy| = |x||y|$. Folgere daraus den Eulerschen 4-Quadrate-Satz

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = \; & (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4)^2 \\ & + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)^2 \\ & + (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2)^2 \\ & + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1)^2.\end{aligned}$$

Schreibe damit die Zahl 7^3 als Summe von vier Quadraten.